Examen VWO

2014

tijdvak 2
woensdag 18 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B (pilot)

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Goniometrie

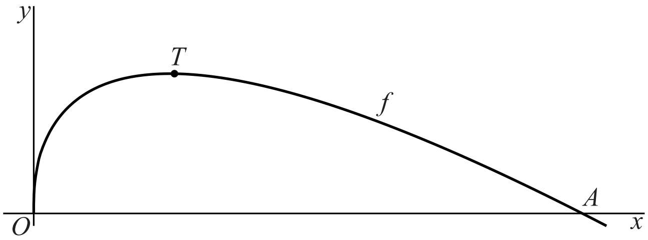
$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$
$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$$
$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

Hoek onder de top

Voor $x \geq 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = 3\sqrt{x} - x$.
De punten $O(0, 0)$ en $A(9, 0)$ liggen op de grafiek van f.
Het punt T is het hoogste punt van deze grafiek. Zie figuur 1.

figuur 1

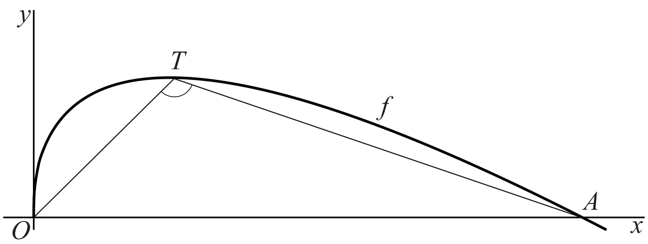


De coördinaten van T zijn $\left(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$.

4p **1** Bewijs dat de coördinaten van T inderdaad $\left(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$ zijn.

In figuur 2 is hoek OTA aangegeven.

figuur 2



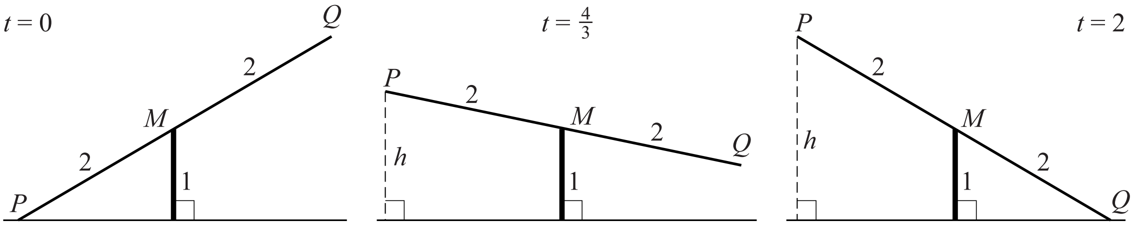
4p **2** Bereken de grootte van hoek OTA. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

Het uiteinde van een wip

We bekijken in deze opgave een wiskundig model voor de beweging van het uiteinde van een wip.

Lijnstuk PQ met midden M en lengte 4 draait om M. De hoogte van M is 1. Zie figuur 1. We kijken naar het verloop van de hoogte h van P. Op tijdstip $t = 0$ is de hoogte van P gelijk aan 0. Van $t = 0$ tot $t = 2$ beweegt P omhoog. In figuur 1 is het lijnstuk getekend op drie tijdstippen: op $t = 0$, op $t = \frac{4}{3}$ en op $t = 2$.

figuur 1



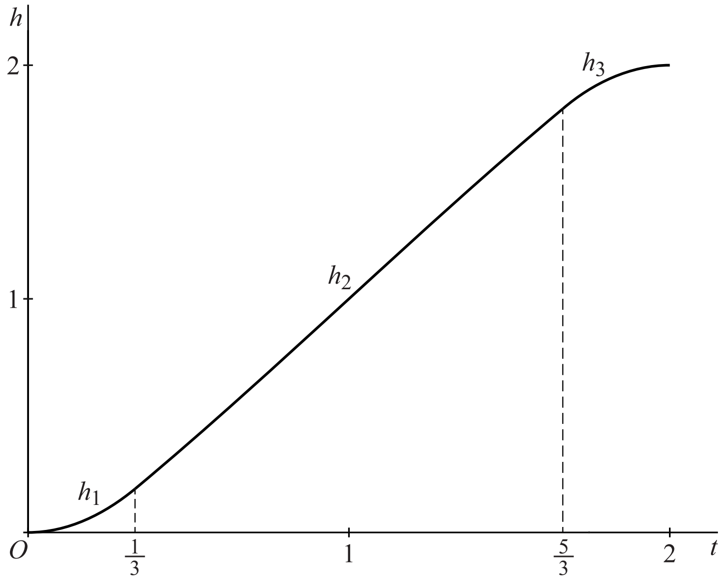
De hoogte van P tijdens de omhooggaande beweging wordt beschreven door het volgende model:

- fase 1: $h_1(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}\right)$ voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$
- fase 2: $h_2(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}\right)$ voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$
- fase 3: $h_3(t) = 1 + 2\sin\left(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30}\right)$ voor $\frac{5}{3} < t \le 2$

Hierin zijn h_1, h_2 en h_3 de hoogtes van P in de verschillende fasen.

In figuur 2 is de grafiek van de hoogte van P in de fasen 1, 2 en 3 getekend.

figuur 2



De hoogte van P aan het eind van fase 2 is $h_2(\frac{5}{3})$. Door $t = \frac{5}{3}$ in te vullen in de formule van h_3 kan worden bewezen dat de hoogte van P aan het begin van fase 3 gelijk is aan de hoogte van P aan het eind van fase 2.

3p **3** Bewijs dat deze hoogtes gelijk zijn.

De helling van de grafiek van h_2 aan het begin van fase 2 is $\frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$.

4p **4** Bewijs dat de helling van de grafiek van h_1 aan het eind van fase 1 hieraan gelijk is.

Voor elke waarde van a, met $0 < a < \frac{2}{3}$, geldt:

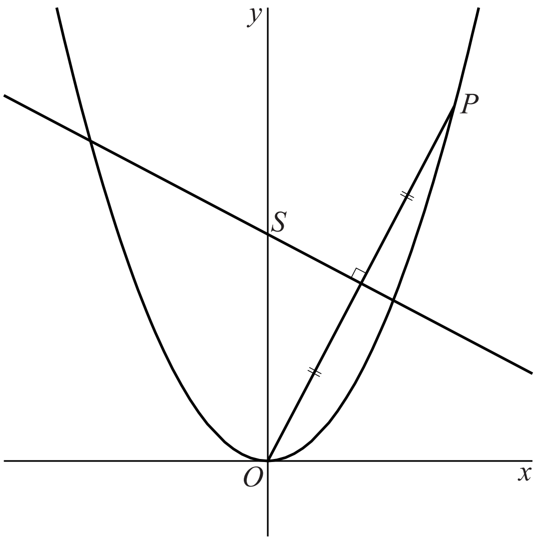
$$\frac{h_2(1-a)+h_2(1+a)}{2} = 1$$

4p **5** Bewijs deze gelijkheid.

Laagste punt

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2$. Op de grafiek van f ligt rechts van de y-as een punt $P(p,\ p^2)$. De middelloodlijn van OP snijdt de y-as in een punt S. Zie de figuur.

figuur



Als P over de grafiek van f naar de oorsprong toe beweegt, dan nadert de y-coördinaat van S tot een bepaalde waarde.

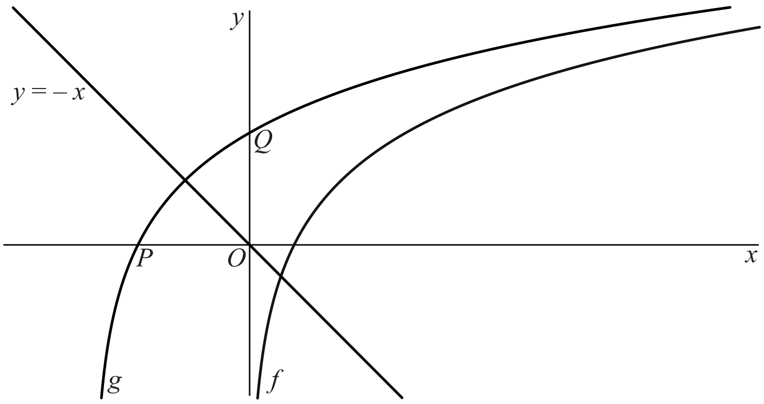
5p **6** Bereken exact deze waarde.

Gespiegelde punten

Voor $x > 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 \cdot \ln x$.
De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, waarbij $a > 1$. De grafiek van g snijdt de x-as in punt P en de y-as in punt Q.

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Zie de figuur.

figuur

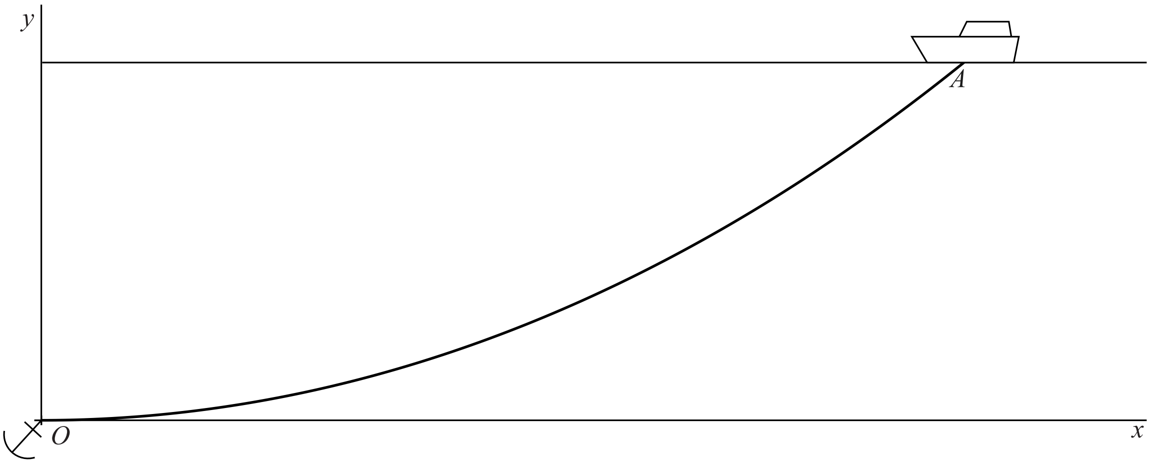


8p **7** Bereken deze waarde van a. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Ankerketting

Een schip ligt op zee voor anker. Door stroming en wind trekt het schip aan de ankerketting. Hierdoor en door het eigen gewicht van de ankerketting neemt de ketting een vorm aan die bekend staat als een kettinglijn. In de figuur is deze situatie schematisch in een assenstelsel weergegeven. De x-as valt samen met de horizontale zeebodem, waarop het anker ligt.
De oorsprong O van het assenstelsel is gekozen in het punt waar de ankerketting aan het anker is bevestigd. Aan het schip zit de ankerketting vast in punt A. We gaan ervan uit dat de ankerketting daar direct het water in gaat.
Het punt A bevindt zich 96 meter rechts van de y-as.

figuur



Een kettinglijn waarvan het laagste punt door O gaat, kan worden beschouwd als een deel van de grafiek van de functie f gegeven door:

$$f(x) = \frac{1}{2a} \cdot \left(e^{ax} + e^{-ax} - 2 \right), \text{ met } a > 0$$

Voor de functie f geldt:

$$1 + \left(f'(x) \right)^2 = \left(\tfrac{1}{2} e^{ax} + \tfrac{1}{2} e^{-ax} \right)^2$$

6p **8** Bewijs deze gelijkheid.

Voor de ankerketting in de figuur geldt $a = \frac{1}{140}$ en $0 \leq x \leq 96$. Hierin zijn x en $f(x)$ in meters. Door golven en wind kan een schip flinke bewegingen maken. Bij een korte ankerketting kan dan het anker losraken. Om dit te voorkomen geeft men bij het uitwerpen van een anker de ankerketting veel lengte. Hiervoor hanteert men in de scheepvaart de vuistregel dat de lengte van de ankerketting tussen anker en schip ten minste driemaal de waterdiepte moet zijn.

De lengte L van het deel van de grafiek van een functie f tussen de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ kan worden berekend met de volgende formule:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$

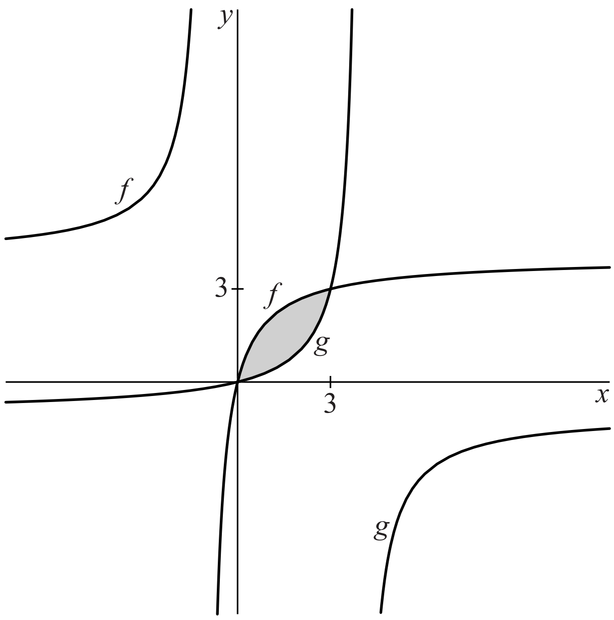
5p **9** Onderzoek of de ankerketting in de figuur aan deze vuistregel voldoet.

Een gebroken functie en zijn inverse

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 4 - \dfrac{4}{x+1}$ en $g(x) = \dfrac{x}{4-x}$.

In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur



De functie g is de inverse van f.

4p **10** Bewijs dit.

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $(0, 0)$ en $(3, 3)$. De grafieken sluiten een vlakdeel in. Dit vlakdeel is in de figuur grijs gemaakt.

6p **11** Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.

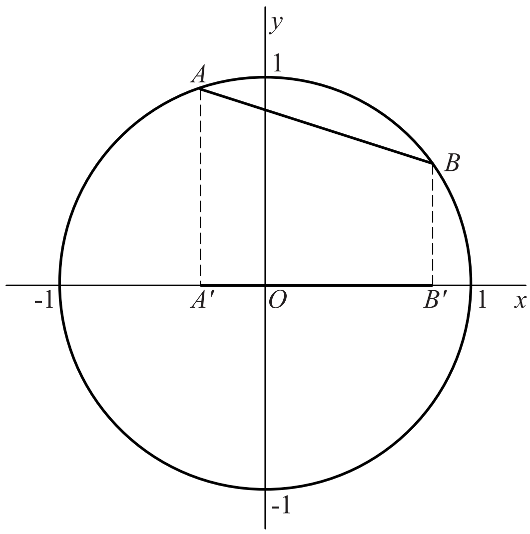
Tussen twee bewegende punten

Over de eenheidscirkel bewegen twee punten A en B. Beide punten bevinden zich op tijdstip $t = 0$ in het punt $(1, 0)$. Ze bewegen met constante snelheid, waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn respectievelijk:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos t \\ y_B(t) = \sin t \end{cases}$$

Voor $t \neq k \cdot \pi$, met k geheel, vallen de punten A en B niet samen en zijn ze de eindpunten van de koorde AB.
In de figuur is de situatie getekend voor $t = \frac{1}{5}\pi$.

figuur



Lijnstuk $A'B'$ is de loodrechte projectie van koorde AB op de x-as. De lengte van $A'B'$ verandert voortdurend tijdens de beweging.

4p **12** Bereken de maximale lengte van $A'B'$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Tijdens de beweging verandert ook de richtingscoëfficiënt van koorde AB. Deze richtingscoëfficiënt noemen we a. Voor elk tijdstip t, waarbij $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel, geldt:

(1) $$a = -\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$$

Deze formule kan bewezen worden met behulp van de volgende goniometrische formules:

(2) $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ (voor elke waarde van p en q)

(3) $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ (voor elke waarde van p en q)

4p **13** Bewijs formule (1) met behulp van formules (2) en (3).

Lijn l is de lijn met vergelijking $y = -x$. Er zijn vier waarden van t, met $0 < t < 2\pi$, waarvoor koorde AB evenwijdig is met l.

5p **14** Bereken exact deze vier waarden.

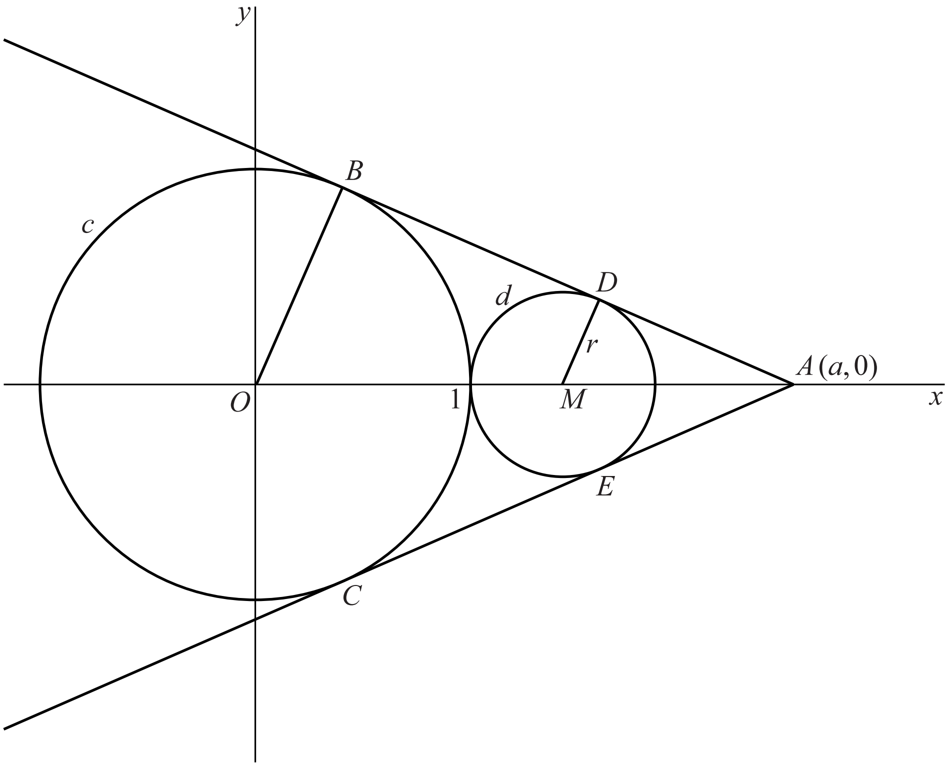
Ingesloten cirkel

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. Verder is gegeven het punt $A(a, 0)$ met $a > 1$.

Er zijn twee lijnen door A die aan c raken. De raakpunten zijn B en C. De twee raaklijnen en cirkel c sluiten een cirkel d in. Cirkel d raakt de twee lijnen in D en E en cirkel c in $(1, 0)$. Cirkel d heeft middelpunt M.

Zie de figuur.

figuur



Driehoek AMD en driehoek AOB zijn gelijkvormig.

Voor de straal r van cirkel d geldt: $r = \dfrac{a-1}{a+1}$

5p **15** Bewijs dat $r = \dfrac{a-1}{a+1}$

Er is een waarde van a waarvoor vierhoek $OCAB$ een vierkant is. In dat geval kan de straal van cirkel d geschreven worden als $r = p + q\sqrt{2}$ waarbij p en q gehele getallen zijn.

5p **16** Bereken exact de waarden van p en q.